Olimpíada Tubarão de Matemática 2017

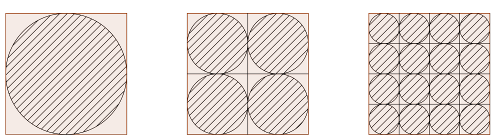
Primeira fase Nível dois, do nono ano do fundamental ao segundo ano do ensino médio

Nome:

1. Seu Barba Branca vai visitar seus netos e leva várias maçãs para seus três netos, Arnaldo, Bernaldo e Cernaldo. Uma mulher vai visitar suas 3 filhas e leva uma cesta de maçãs. Para Alberto, dá a metade das maçãs e mais meia maçã. Para Beberto, dá a metade das maçãs que sobraram e mais meia maçã. Para Ceberto, novamente dá a metade das maçãs que sobraram e mais meia maçã, ficando sem nenhuma maçã. Quantas maçãs o senhor Barba Branca levou?

   (a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9 (e) 11

2. As figuras abaixo mostram círculos dentro de quadrados. Qual delas mostra a maior área tracejada?



   (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) $1 = 2 = 3$ (e) NDA

3. Quantos anos vai completar o senhor Barba Branca em 2018 sabendo que ele além de ter menos de 100 anos ele nasceu num ano que tem raiz quadrada exata(é um quadrado perfeito), ou seja, existe um número que multiplicado por ele mesmo é igual ao ano de nascimento do senhor Barba Branca. Veja, por exemplo, $25 = 5 \times 5$ é um quadro perfeito.

   (a) 45 (b) 78 (c) 80 (d) 82 (e) 92

4. Um novo jogo para celulares e tablets consiste num quadriculado $n \times n$ em que cada um dos n^2 pontos representa uma mina. O jogador é um soldado cuja missão é desarmar todas as minas, para isso o jogador deve partir de um ponto e, sem tirar o dedo do touch, fazer segmentos que passem por todos as n^2 minas. Os segmentos podem ser horizontais, verticais ou diagonais. Cada fase aumenta o valor de n sendo na primeira fase $n = 3$, na segunda $n = 4$ e assim sucessivamente. A pontuação do jogador é marcada por uma barra de vida. Inicialmente começa com 100 lifes e cada segmento desenhado ele perde um life.

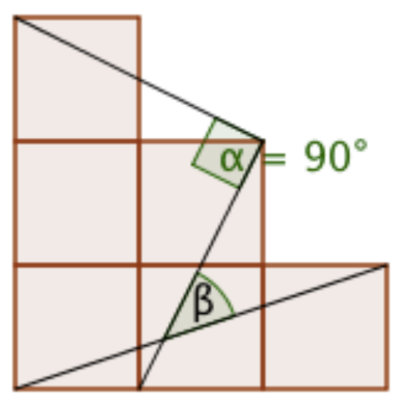
   O recordista mundial do jogo das minas afirmou ser insuperável, qual sua pontuação ao término da sexta fase?

   (a) 100 (b) 80 (c) 70 (d) 60 (e) 50

5. O Senhor Barbatana escreve uma lista de números começando em 29. O próximo número da lista é a soma dos quadrados dos dígitos do número escrito anteriormente. Assim, o segundo número de sua lista é $2^2 + 9^2 = 85$, o terceiro será $8^2 + 5^2 = 89$ e assim sucessivamente. Qual o número que ocupa a posição 2017?

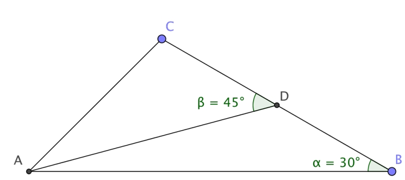
   (a) 89 (b) 37 (c) 58 (d) 85

6. Determine o ângulo β marcado na figura



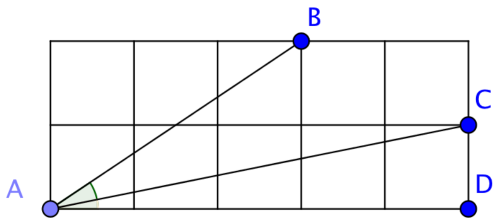
   (a) 15 (b) 30 (c) 45 (d) 50 (e) 60

7. Na figura abaixo, qual o valor em graus do ângulo CAD, sabendo que D é ponto médio de BC?



   (a) 15 (b) 30 (c) 45 (d) 50 (e) 60

8. No reticulado abaixo cada quadrado tem um centímetro de lado. seja α o angulo BAD e seja β o ângulo CAD. quanto vale $\alpha + \beta$:



9. A conjectura de Goldbach afirma que todo número par maior que 2 pode ser escrito como soma de dois primos. Dizemos que um número é super-Goldbach quando possui número maximal de formas de ser escrito como soma de dois primos. Esse máximo é atingido da seguinte forma. Seja $2n$ o número em questão, dado p um primo $n < p < 2n$ se $2n - p$ for também primo, então $2n = p + (2n - p)$. Note que 36 é super-Goldbach pois

$$36 = 19 + 17 = 23 + 13 = 29 + 7 = 31 + 5$$

Quais dos seguintes números é super-Goldbach.

(a) 105 (b) 300 (c) 210 (d) 360 (e) 144

10. Um retângulo de papel possui dimensões $6cm$ e $18cm$. Dobrando o papel fazendo coincidir dois vértices opostosobtemos a superposição de dois triângulos. Qual a área de cada um desses triângulos em cm^2?

(a) 24 (b) 30 (c) 36 (d) 48 (e) 54

11. O Senhor Barbatana muda de senha a cada semana. Como ele gosta muito de números ele decidiu escolher os números usando a seguinte regra:

- toda semana usar uma senha diferente;
- as senhas tem 5 dígitos distintos;
- o primeiro dígito é igual a soma dos outros 4 dígitos

Por quantas semanas o senhor Barbatana poderá usar essa lógica para escolher suas senhas?

(a) 72 (b) 144 (c) 168 (d) 216 (e) 288

12. Quantas peças possui um quadrominó, jogo com peças quadradas onde em cada lado do quadrado deve estar um número entre 0 e 6.

(a) 261 (b) 276 (c) 246 (d) 546 (e) NDA

13. Um tanque demora 4 horas para ser preenchido. Sabemos que há duas torneiras preenchendo-o e cada uma delas tarda um certo número inteiro de horas para encher o tanque caso o fizesse sozinha. Analise as seguintes afirmações:

- A soma das horas levadas por cada torneira para preencher o tanque é um quadrado perfeito.
- Cada torneira sozinha leva o mesmo tempo para preencher o tanque?
- Há cinco configurações diferentes para o tempo de cada torneira.

Podemos afirmar que são verdadeiras, apenas:

(a) I (b) II (c) II e III (d) I e III (e) III

14. Considere um quadriculado plano em que cada quadradinho mede $1cm$. Analise as seguintes afirmações sobre a área de um triângulo com vértices no quadriculado.

- A menor área possível é $\frac{1}{2}$
- Se um triângulo tem área mínima, então não existem pontos do quadriculado em seu interior.
- Existem triângulos de área mínima com perímetro arbitrariamente grande.
- A área de um triângulo com vértices no quadriculado é inteiro.

O número de afirmações ccorretas é:

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

15. Uma progressão geométrica (PG) de razão q é uma sequência em que cada termo a partir do segundo é o anterior multiplicado por q. A sequência $2, 3, \frac{9}{2}, \frac{27}{4}, ...$ é uma PG de razão $\frac{3}{2}$. Dentre as alternativas abaixo encontre a única que indica uma 3 termos (não necessariamente consecutivos) de uma PG.

   (a) $12, 20, 35$

   (b) $7, 9, 11$

   (c) $81, 24, 16$

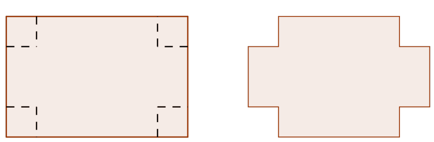
   (d) $5, 25, 81$

   (e) $8, 18, 80$

16. 8 gafanhotos se encontram num vértice de um cubo. Ao acender uma Luz verde todos os gafanhotos mudam de vértice. Os gafanhotos sempre mudam para o vértice diagonalmente oposto ao vértice de origem, mas ficando na mesma face. Perceba que um vértice pertence a 3 faces e portanto o gafanhoto tem 3 possibilidades de mudança. A luz verde acaba de acender, Quantas são as configurações que os gafanhotos podem se reorganizar?

   (a) 81 (b) 48 (c) 96 (d) 64 (e) 100

17. Um estudante deseja fazer um caixa de papelão. Para isso ele usa um pedaço de papelão de dimensões $10cm$ e $30cm$ e retira de cada ponta um quadradro de papelão. Assim, Ao dobrar obtem uma caixa sem tampa, veja a figura abaixo. Qual o maior volume em litros que ele pode obter para essa caixa?



   (a) 1 (b) 1,5 (c) 2 (d) 2,5 (e) NDA

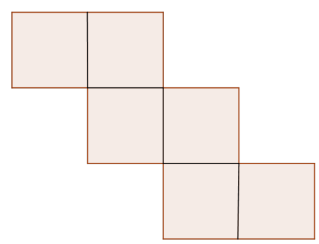
18. Desenhamos uma circunferência e dividimos em 100 partes iguais. Para fazer mandalas você deve escolher um ponto inicial e um número fixo de pulos sempre indo na direção dos ponteiros do relógio. A partir do ponto inicial e fazendo esse número de pulos encontramos outro ponto, então fazemos o segmento ligando esses dois pontos e novamente damos o mesmo número de pulos... Dizemos que fizemos uma mandala quando passamos por todos os 100 pontos. Quantas são as mandalas de 100 pontos?

   (a) 20 (b) 30 (c) 40 (d) 50

19. O senhor Barbatana foi comprar um novo jogo virtual e chegando lá encontrou um velho amigo, o senhor Barba Branca. Eles conversaram por horas e então o senhor Barbatana perguntou perguntou o preço do jogo. O senho Barba Branca lembrou dos velhos tempos do colégio e perguntou se o senhor Barbatana se ele ainda gostava de matemática e propôs um desafio para ele tentar adivinhar o preço do jogo. Ele disse: "é o menor inteiro positivo múltiplo de 9 onde todos os algarismos são pares". Qual a soma dos quadrados dos algarismos do preço do jogo?

   (a) 40 (b) 68 (c) 132 (d) 116 (e) 30

20. O hexadominó é a figura representada abaixo. Cada quadrado do Hexadominó tem lado de 1cm. Qual a menor área retangular que pode cobrir todo o hexadominó?



   (a) 12 (b) $\dfrac{21}{2}$ (c) 10 (d) 11 (e) $\dfrac{23}{2}$